Wasserpreise

Stochastische Funktionale Abhängigkeiten modellieren

Annika Wrackmeyer
Peter Türk
Tim Schweisgut

Übersicht

- Grundlagen
- Aufgabenblatt
- Fazit

Randbedingungen

- Korrelation und Regression in NRW Pflichtthema in Stufe 11
  - Um stochastische und analytische Vorgehensweisen zu verbinden
  - Führt in charakteristische Vorgehensweisen wissenschaftlichen Arbeitens ein
- Hessen: Regression in Stufe 12/13
- Mathe-Ass 8.0 steht zur Verfügung

Regression und Korrelation

- Regression:
  - Zur Bestimmung einer Funktion, die sich einer gegebenen Punktewolke optimal annähert
- Korrelation:
  - „Je mehr ... desto mehr“ – „Je mehr ... desto weniger“
  - Statistischer Zusammenhang zweier Ergebnisse
  - Bestimmt ein Maß dafür, ob die Annahme eines Zusammenhangs zwischen x- und y- Werten sinnvoll ist

Lineare Regression

- In der Anwendung werden Zusammenhänge oft linearisiert, da lineare Regression, d.h. die Bestimmung einer Regressionsfunktion mit der Gleichung $y = ax + b$, in der Praxis einfacher ist

Lineare Regression, Beispiel

$$\upsilon = \frac{\upsilon_{\max} \times [S]}{K_M + [S]}$$

ν: Reaktionsgeschwindigkeit (bekannt)

ν_{max}: max. Reaktionsgeschw.

[S]: Substratkonzentration (bekannt)

K_M: Konstante (Michaelis-Menden-Konst.)

- Durch Kehrwertbildung erhält man:

$$\underbrace{\frac{1}{\upsilon}}_{y} = \underbrace{\frac{K_M}{\upsilon_{\max}}}_{a} \times \underbrace{[S]}_{x} + \underbrace{\frac{1}{\upsilon_{\max}}}_{b}$$

Unterrichtliche Voraussetzungen

- Lineare Regression und Korrelation als Verfahren bekannt
- Exponentielle Regression benutzt
  - Logarithmieren der Ausgangsdaten
  - Bestimmung der Regressionsgeraden
  - Berechnung der Ausgangs-Exponentialfunktion
- Modellierung von Datenmaterial

Vorgehensweisen

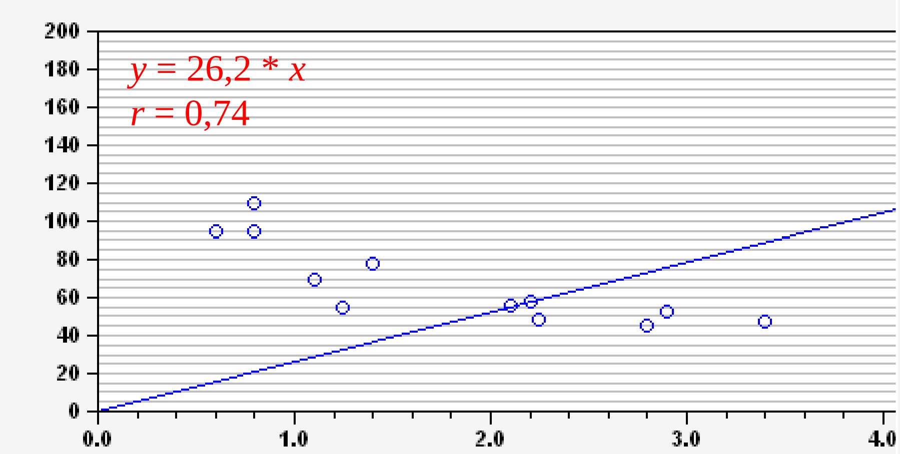
- 1. Explorativen Vorgehen zur Suche geeigneter Modelle
  - Aufgabenteil a)
- 2. Anpassen von Modellparametern an gemessene Daten
  - Aufgabenteil b)

Aufgabenblatt
a) 1.

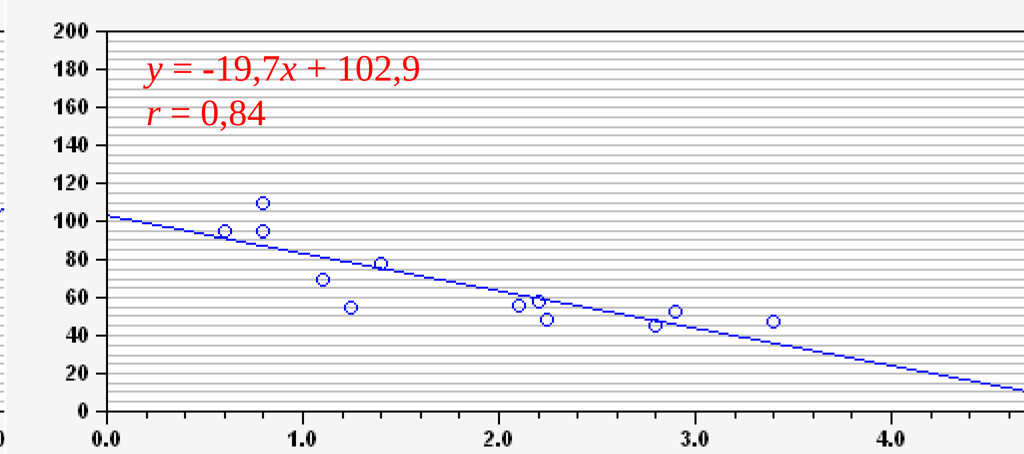
- Aufgabe dient dazu sich den Sachverhalt klar zu machen (was ist das Ziel)
- Übertragen der realen Bedingungen in mathematische Funktionen
- Musterlösung: man sucht Graphen, der:
  - Die y-Achse schneidet (deutlich über 110)
  - Die x-Achse nicht schneidet, sondern sich einem Minimalwert annähert
  - Je teurer, desto weniger Verbrauch

Aufgabenblatt
a) 2.

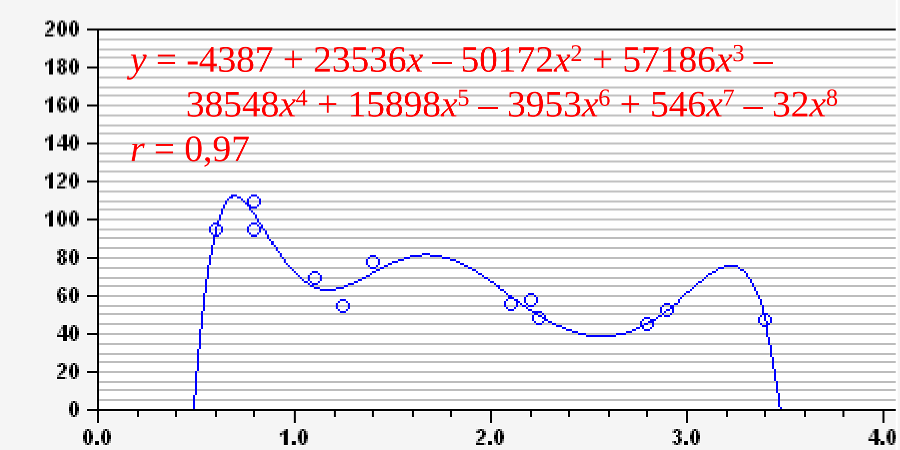
- Im 2. Teil der Aufgabe a) müssen sich die Schüler die Funktionen von dem Programm Matheass ausgeben lassen und durch abskizzieren näher betrachten
- Das Prinzip der Regressionsrechnung und Linearisierung wurde in den vorangegangenen Stunden besprochen.
- Daher wissen die Schüler, wie das Programm arbeitet. Es ist daher keine Black-Box-Anwendung mehr.



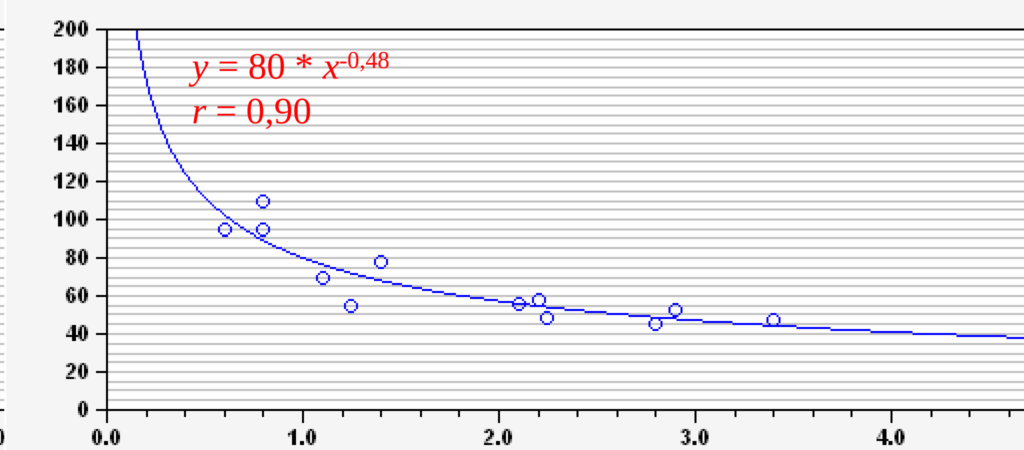
y = 26,2 * x
r = 0,74



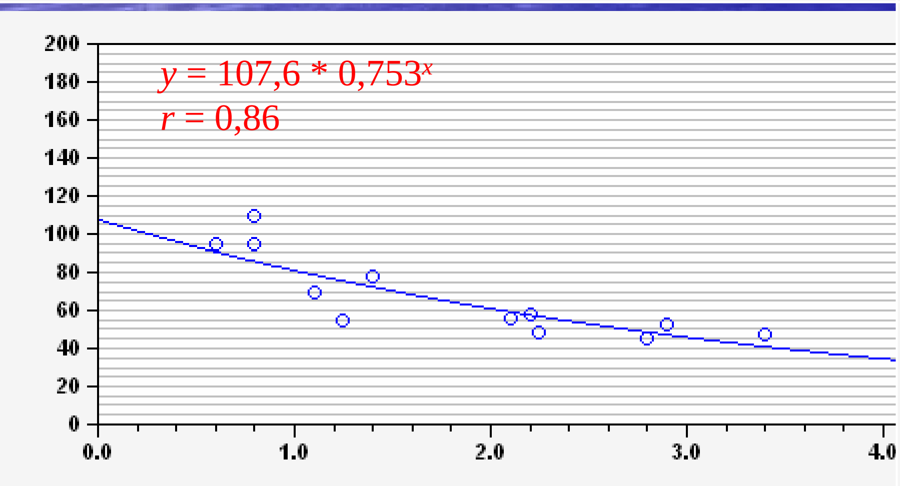
y = -19,7x + 102,9
r = 0,84



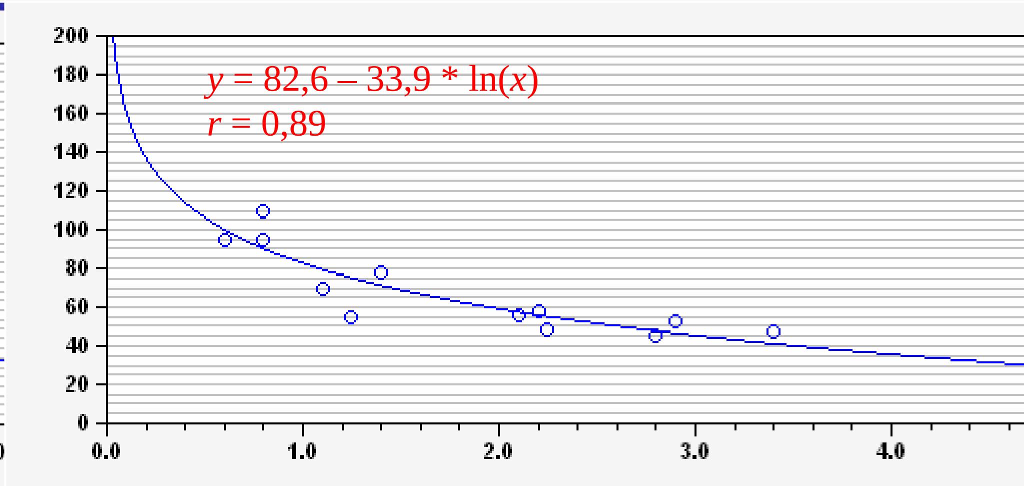
y = -4387 + 23536x – 50172x^2 + 57186x^3 – 38548x^4 + 15898x^5 – 3953x^6 + 546x^7 – 32x^8
r = 0,97



y = 80 * x^-0,48
r = 0,90



y = 107,6 * 0,753^x
r = 0,86



y = 82,6 – 33,9 * ln(x)
r = 0,89

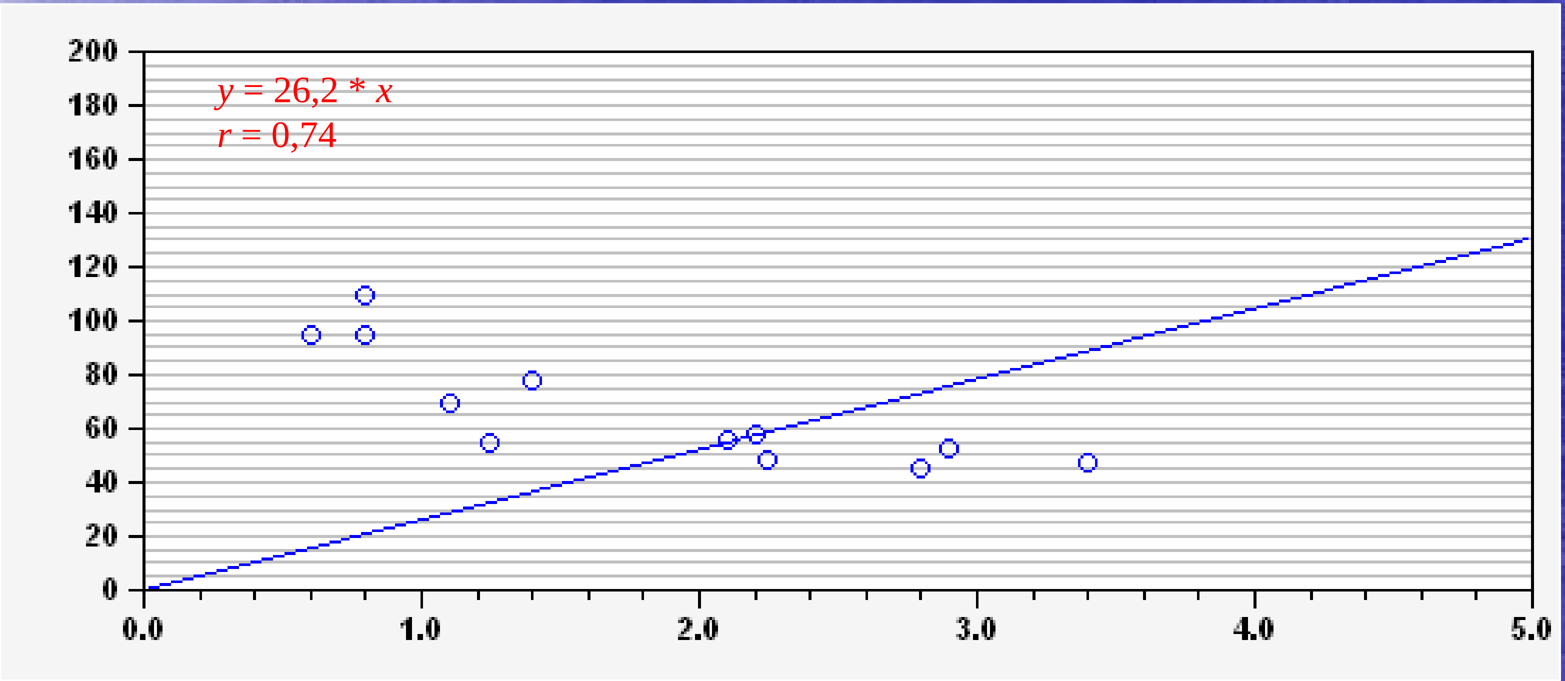
Aufgabenblatt
a) 3.

- Bei der Analyse der errechneten Funktionen wenden die Schüler den Begriffsapparat zur Beschreibung funktionaler Zusammenhänge an

- Dies geschieht immer mit Blick auf die Anforderungen an die gesuchte Funktion – und somit auch an die Realsituation

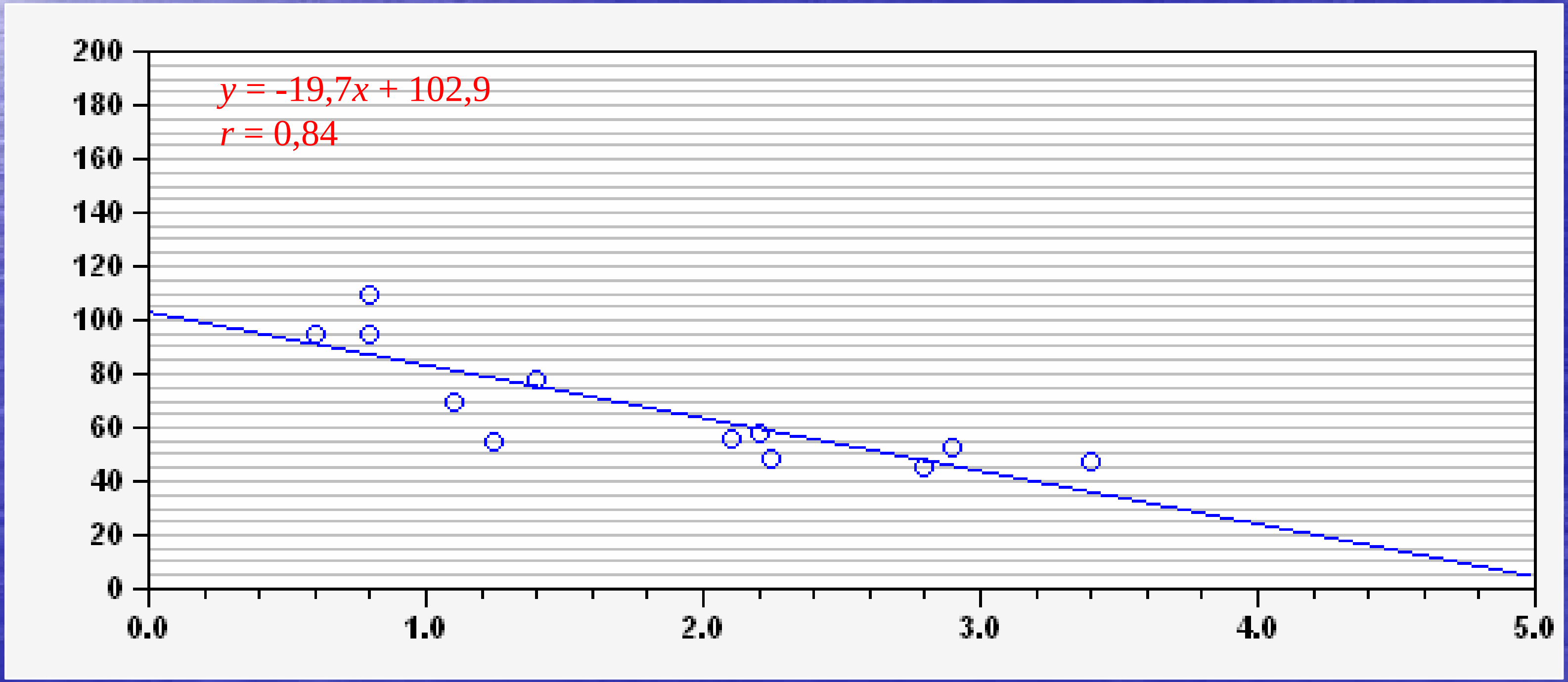
Aufgabenblatt
a) 3. (Musterlösung I)

- Der Graph passt nicht zum Verlauf der Punkte, nicht zum erwarteten y-Achsenschittpunkt und nähert sich keiner waagrechten Asymptote. Trotz r=0,74 ist der Graph unbrauchbar



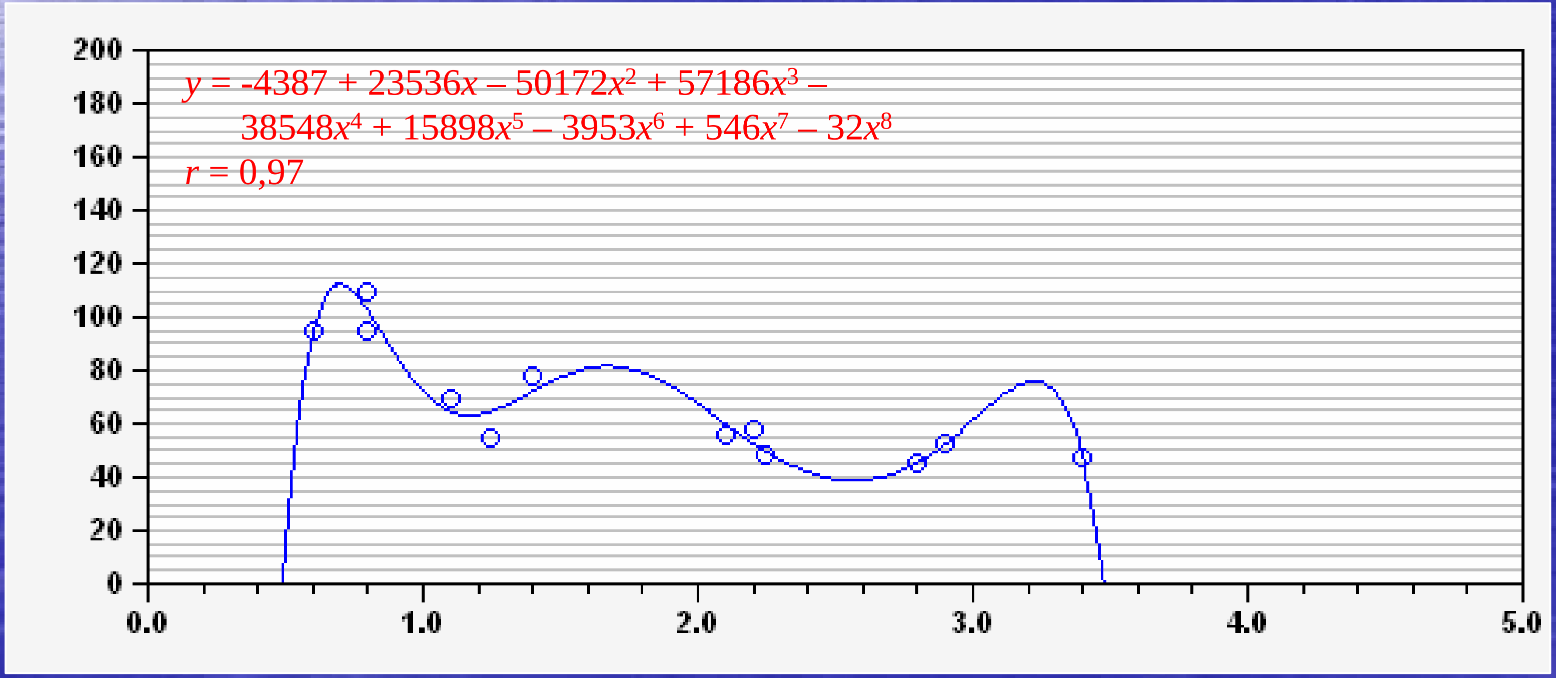
Aufgabenblatt
a) 3. (Musterlösung II)

- Trotz hoher Korrelation von r=0,84 ist die lineare Regression ebenfalls unbrauchbar. Die y-Achse wird zu niedrig geschnitten, und die x-Achse wird geschnitten



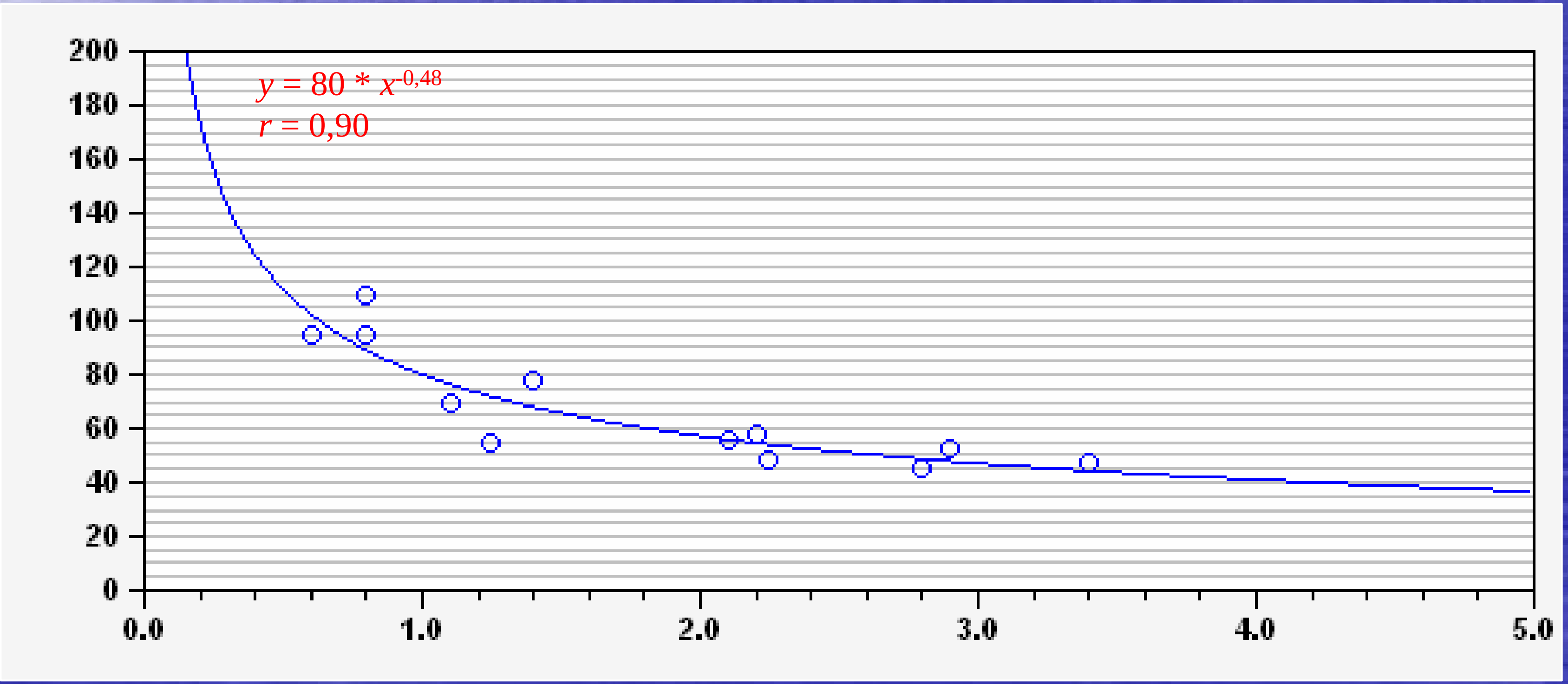
Aufgabenblatt
a) 3. (Musterlösung III)

- Polynomieller Ansatz liefert zwar hohen Korrelationskoeffizient (r=0,97) passt aber nicht zu den Anforderungen: y- und x-Achsenschnittpunkte, Hin- und Herschwanken zwischen den Punkten



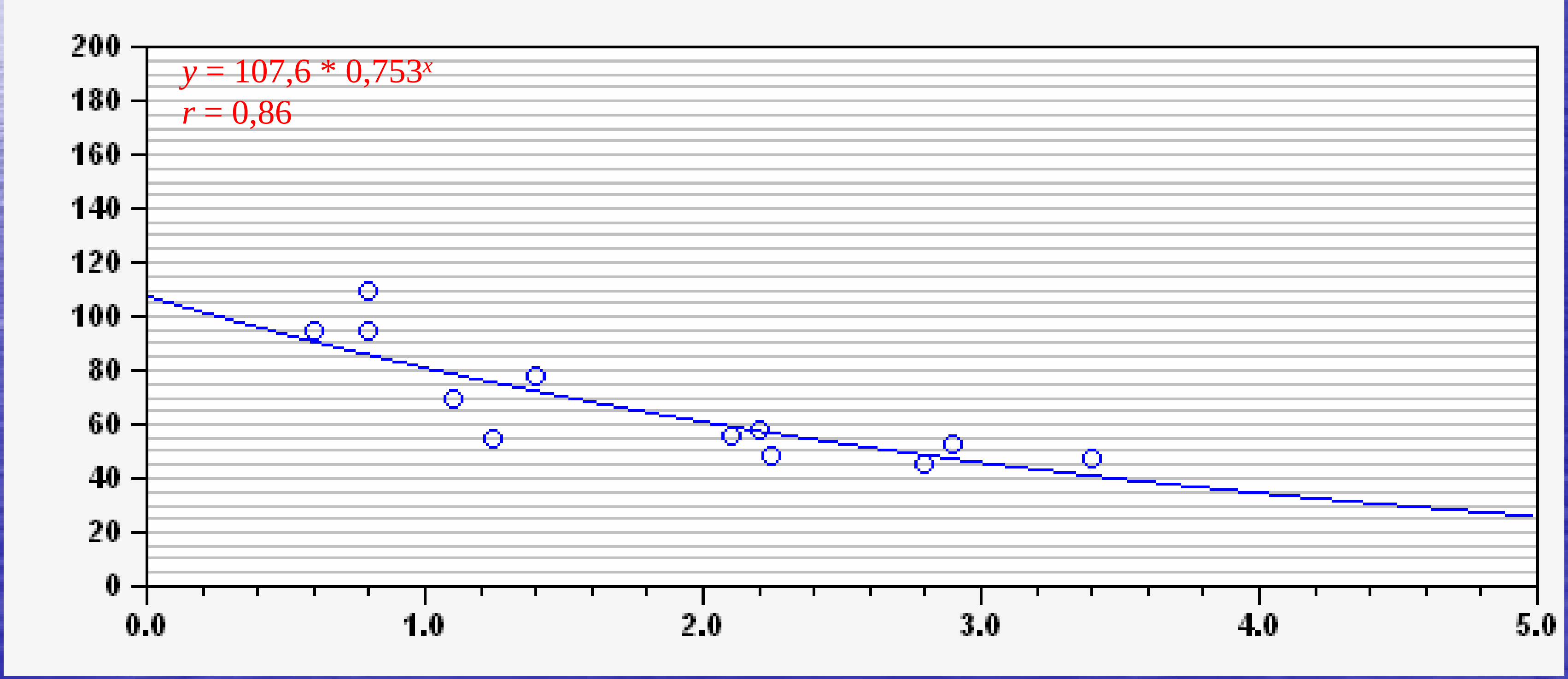
Aufgabenblatt
a) 3. (Musterlösung IV)

- Die geometrische Funktion passt einigermaßen zur Punktewolke (r=0,9). Die Polstelle bei x=0 ist jedoch unsinnig und die Asymptote (die x-Achse) ist zu niedrig.



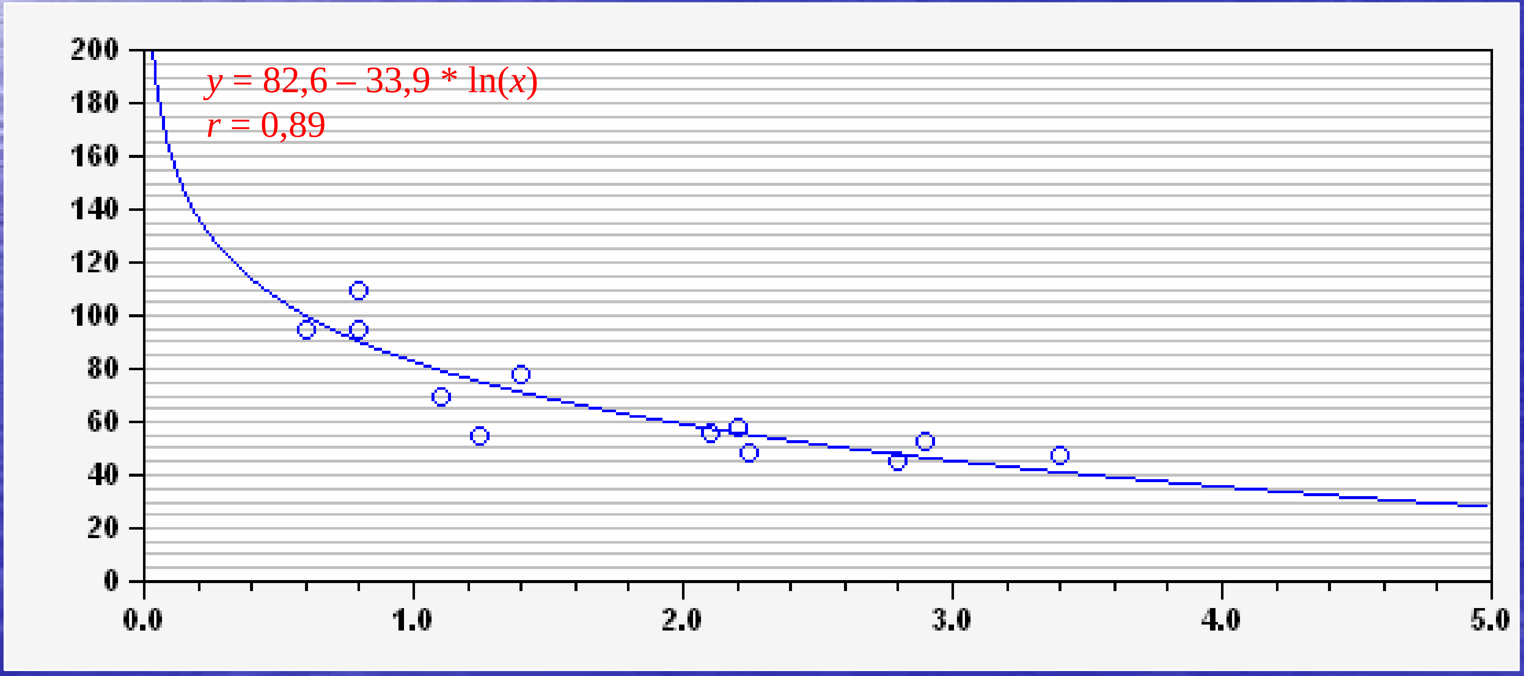
Aufgabenblatt a) 3. (Musterlösung V)

- Bei der exponentiellen Regression liegt der y-Achsenschnittpunkt zu niedrig. Die Asymptote ist richtig, müsste allerdings auch höher liegen.



Aufgabenblatt a) 3. (Musterlösung VI)

- Bei der logarithmischen passt der Graph einigermaßen zur Punktewolke (r=0,89), aber der Pol bei x=0 und der Schnittpunkt der x-Achse passen nicht zur Problembeschreibung.



Aufgabenblatt
a) 4.

- Alle Ansätze sind zumindest in Teilen nicht brauchbar. Eine angepasste Kombination aus geometrischer und exponentieller Regression erscheint brauchbar.

Aufgabenblatt
b) 1.

- Den Schülern soll in diesem Aufgabenteil bewusst werden in welcher Form die gegebene Formel mit der Realsituation im Zusammenhang steht.

Aufgabenblatt
b) 1. (Musterlösung)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{180}{cx^{d}+1}+20\right)=20$$

- Da x^d für $x>0$ und $d>0$ (kann aufgrund der Versuchsdaten angenommen werden) gegen unendlich geht und somit der Bruch gegen 0.
- Für $x=0$ ist $f(0) = 180+20 = 200$

- Das bedeutet bei kostenlosem Wasserverbrauch steigt der Verbrauch gegenüber dem Maximalwert 110m³ auf 200m³ an, bei großen Wasserpreisen sinkt der Verbrauch jedoch nicht unter 20m³.

Aufgabenblatt
b) 2.

- Aufgabe dient dazu eine gegebene Formel so abzuändern, dass man die gewünschten Situationsparameter erhält.
- Geht man etwa davon aus, dass der Minimalverbrauch bei 10m³ liegt und der Maximalverbrauch bei 250m³ so erhält man folgende Modellierung:

$$f(x) = \frac{240}{cx^d + 1} + 10$$

Aufgabenblatt
b) 3.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{180}{cx^d+1}+20 \\
\Leftrightarrow y-20 &= \frac{180}{cx^d+1} \\
\overset{y\neq 20}{\Rightarrow} \frac{180}{y-20}-1 &= cx^d \\
\Rightarrow \log\left(\frac{180}{y-20}-1\right) &= d\cdot\log(x)+\log(c)
\end{aligned}
$$

Aufgabenblatt
b) 3.

Man hat nun eine Gleichung der Form:

$$y' = a \cdot x' + b$$

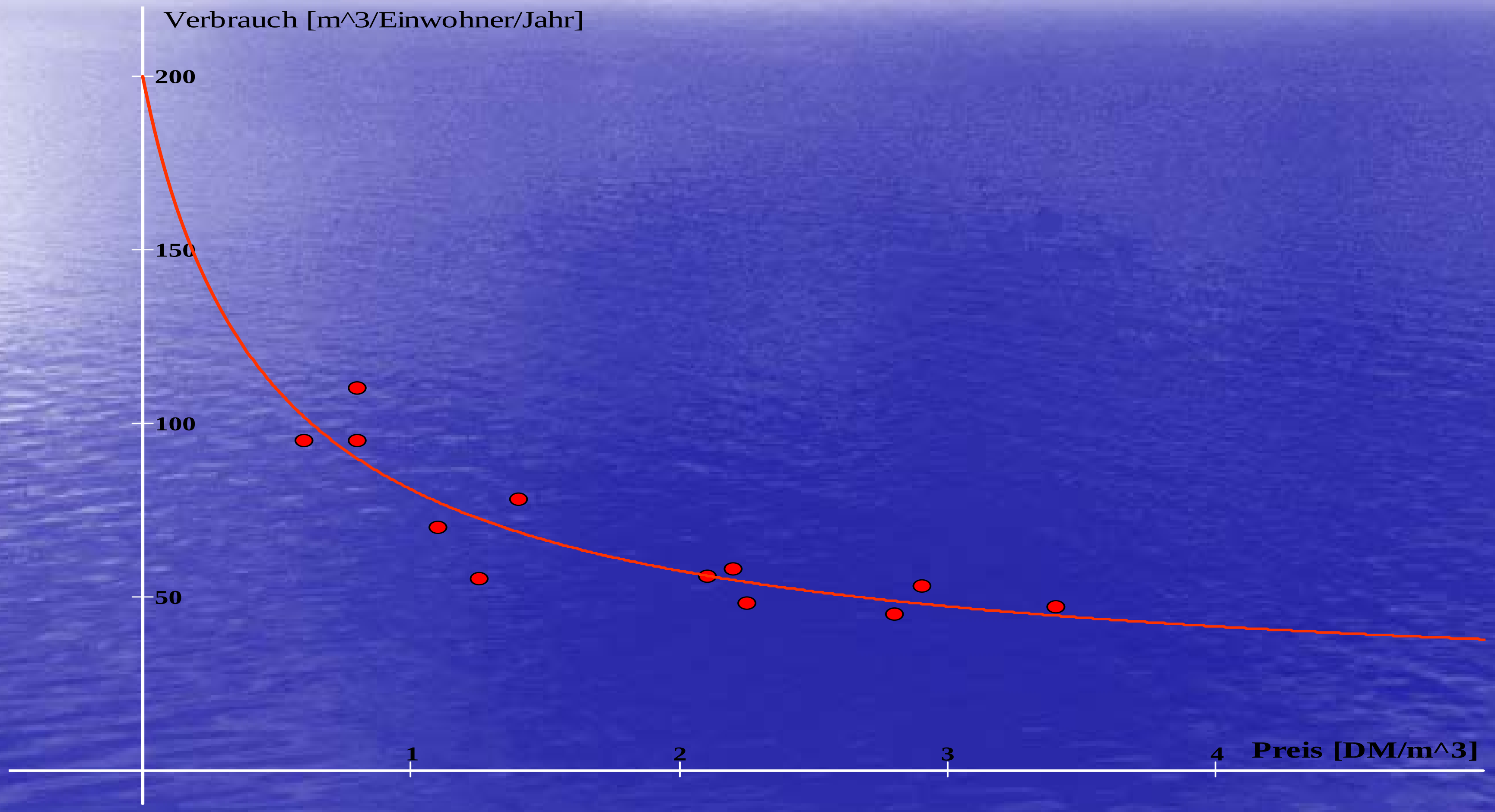
Für diese Gleichung liefert der Rechner mit den gegebenen Werten die Regressionsgrade:

$$y' = 0,9643 \cdot x' + 0,2923$$

Durch Resubstitution erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} c &= 10^b \approx 1,96 \\ d &= a \approx 0,96 \end{aligned}$$

Aufgabenblatt
b) 4.



Aufgabenblatt
b) 5.

- Der Funktionsansatz liefert akzeptable Werte für den y-Achsenabschnitt und die Asymptote (im Gegensatz zu den bisher gesehenen Ansätzen).
- Er nähert die Punktwolke gut an

Fazit

- Vorteile von PC:
  - tiefer in Materie eindringen durch komplexere Beispiele
  - anwendungsorientierte Aufgabe ist sinnvoll für spätere Praxis
- PC dient nur als Ergänzung, nachdem Grundlagen vorher besprochen wurden
- Ist ein realitätsnahes Beispiel was immer zwischen Realität und Abstraktion hin- und herspringen lässt

Vortrag zum Herunterladen

- http://www.timschweisgut.de